10/5/2016

Ώρες γραφείου:
Πέμπτη: 9-12 Αίθ 10
Δευτέρα 6: 14:00-16:00
Τρίτη 7: 14:00-15:45
Τετάρτη 8: 14:00-16:00

* όπου $P[e_1|e_2] = \begin{bmatrix} i & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}$

$P^{-1}BP = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$

<u>Υπενθύμιση</u>

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός $\Rightarrow$ ο A διαγωνιοποιήσιμος και $\exists\ P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογ. με $P^{-1}AP =$ διαγώνιος

<u>Παρατήρηση</u>

Δεν ισχύει για $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ συμμετρικό.

$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ +i & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Τότε A συμμετρικός αλλά όχι διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{C}$

Απόδειξη: (όχι διαγωνιοποιήσιμος)

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 1-x & i \\ i & -1-x \end{vmatrix} = x^2 \in \mathbb{C}[x]$$

<u>α' τρόπος</u> Εύκολα βλέπουμε ότι $\dim_{\mathbb{C}} V_A(0) = 1$ άρα όχι διαγωνιοποιήσιμος

<u>β' τρόπος</u> Αν A διαγων. $\Rightarrow m_A(x)$ διαιρεί το x^2 και είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων

Άρα $m_A(x) = x \Rightarrow \mathbb{O}_{2\times 2} = m_A(A) = A$ άτοπο

<u>Φυλ 8</u>

(4) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Απόδ. $\chi_A(x) = \begin{vmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{vmatrix} = x^2 + 1 \in \mathbb{R}[x]$. Δεν

$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$. Υπολογ. $P \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ ώστε $P^{-1}BP$ διαγώνιος

Λύση: $\chi_B(x) = (x+i)(x-i) \in \mathbb{C}[x]$ Άρα :

$V_B(-i)=\left\{\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}\right\}$

* Ιδιοτιμές	Αλγεβρ.	Γεωμ.
i	1	1
$-i$	1	1

$V_B(\lambda_1)=V_B(i)$

$(A-iI_2)\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$ $V_B(i)$ Βάση $\begin{bmatrix}1\\ i\end{bmatrix}$

Γράφεται σαν γινόμενο πρωτοβαθμίων στο $\mathbb{R}[x]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ A όχι διαγωνίσιμος πάνω στο $\mathbb{R}$

$\chi_B(x)=x^2+1=(x+i)(x-i)$. Άρα έχω δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές πάνω στο $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ B διαγωνίσιμος / $\mathbb{C}$

(Χρησιμοποιούμε

Αν $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$ και έχει n διακεκριμένες ιδιοτιμές στο $\mathbb{F}$ $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος πάνω στο $\mathbb{F}$)

(7) $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Υποθέτουμε $A^3=A^2$. Ν.δ.ο. $A^2=A$

Λύση Έστω $m_A(x)\in\mathbb{R}[x]$ το ελάχιστο πολυώνυμο του A και $\phi(x)=x^3-x^2=x^2(x-1)$.

Αφού $A^3=A^2\Rightarrow\phi(A)=0_{n\times n}$. Άρα από τον ορισμό του $m_A(x)$ το $m_A(x)$ διαιρεί το $\phi(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$. Άρα έχουμε τις περιπτώσεις

$m_A(x)=x$, $m_A(x)=x^2$, $m_A(x)=(x-1)$

$m_A(x)=x(x-1)$, $m_A(x)=x^2(x-1)$

Άρα A συμμετρικός $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος πάνω στο $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $m_A(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων

άρα $m_A(x)=x$ ή $m_A(x)=(x-1)$ ή $m_A(x)=x(x-1)$

Στην πρώτη περίπτωση $A=0_{n\times n}\Rightarrow A^2=A$

Στην δεύτερη περίπτωση $A=I_n\Rightarrow A^2=A$

Στην τρίτη περίπτωση $m_A(A)=0_{n\times n}\Rightarrow A(A-I_n)=0$

$\Rightarrow A^2=A$ Άρα πάντα ισχύει $A^2=A$

(9) Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $A^2+\alpha A+\beta I_n = 0_{n\times n}$

i) Αν $\alpha^2-4\beta>0$ ν.δ.ο A διαγωνίσιμος /$\mathbb{R}$.

ii) ...

Λύση

iv) Αφού $\beta \neq 0$

$A^2+\alpha A=-\beta I_n \Rightarrow I_n = -\frac{A}{\beta}\cdot A - \frac{\alpha}{\beta}A =$

$= A\left(-\frac{1}{\beta}A-\frac{\alpha}{\beta}I_n\right)$ (1) $= \left(-\frac{1}{\beta}A-\frac{\alpha}{\beta}I_n\right)A$ (2)

Από (1)+(2) έπεται A αντιστρέψιμος και

$A^{-1} = -\frac{1}{\beta}A-\frac{\alpha}{\beta}I_n$

Έστω $m_A(x)\in\mathbb{R}[x]$ ε. Ξέρουμε ότι είναι μονικό πολυώνυμο βαθμού τουλάχιστον 1. Θέτουμε

$\phi(x)=x^2+\alpha x+\beta \in \mathbb{R}[x]$

Από υπόθεση

$\phi(A)=0_{n\times n}$. Άρα $m_A(x)$ διαιρεί το $\phi(x)$ στο $\mathbb{R}[x]$ (*)

Περίπτωση 1) Το ϕ έχει δύο διακεκριμένες πραγματικές ρίζες (που συμβαίνει αν και μόνο αν $\alpha^2-4\beta>0$. Τότε αφού έπεται το $m_A(x)$ γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβάθμιων στο $\mathbb{R}[x]$ $\Rightarrow$ A διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$.

2) ϕ δεν έχει πραγματικές ρίζες ($\Leftrightarrow \alpha^2-4\beta<0$) Άρα $\phi(x)$ ανάγωγο στο $\mathbb{R}[x]$ και από (*)

$\Rightarrow m_A(x) = \phi(x)$. Άρα το $m_A(x)$ δεν γράφεται γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων στον $\mathbb{R}[x] \Rightarrow A$ όχι διαγωνίσιμος $/\mathbb{R}$.

(3) Το $\phi[x]$ έχει διπλή πραγμ. ρίζα $\Leftrightarrow a^2 = 4b$. Τότε $\lambda = \frac{-a}{2}$

Άρα έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ αυτή η ρίζα.

$(x-\lambda)^2 = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 \} \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{2}$

Άρα $\phi(x) = \left(x - \left(-\frac{a}{2}\right)\right)^2$ Αφού $(*)$ 2 περιπτ:

1) $m_A(x) = \phi(x)$

2) $m_A(x) = (x - (-a/2))$

Στην 1) $m_A(x)$ όχι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων. Άρα A όχι διαγωνίσιμος $/\mathbb{R}$.

2) $m_A(x)$ " " " γινόμενο

Άρα A διαγωνίσιμος $/\mathbb{R}$ και $m_A(A) = 0_n$

" $\Rightarrow A = -\frac{a}{2} I_n$

(15) Έστω $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ η γραμ. απεικόνιση με $T((x,y,z)) = (2x+y+4z,\ 3x+3z,\ 4x+2y+z)$

Βρείτε την προσαρτημένη (επίσης λέγεται συζυγής) $T^*: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ως προς το εσωτ. γινόμενο του $\mathbb{R}^3$

Υπενθύμιση: Έστω $V(V, \langle\,\rangle)$ ευκλείδιος χώρος πεπερ. διάστασης $V \neq \{0_V\}$ και $T: V \to V$ γραμμική. Η συζυγής γραμ. απεικόνιση $T^*: V \to V$ είναι η μοναδική με την ιδιότητα $\langle T(u), w\rangle = \langle u, T^*(w)\rangle\ \forall u, w \in V$

Θα χρησιμοποιήσουμε ότι αν $e=(e_1,\dots,e_n)$ ορθοκανονική βάση του V τότε $[T^*]^e_e = \left([T]^e_e\right)^t$ (1)

Λύση

Έχουμε $e=(e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1))$ την κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$ είναι ορθοκανονική

Έχουμε $T(e_1)=T((1,0,0))=(2,3,4)=$

$= 2e_1+3e_2+4e_3$ άρα $[T]^e_e = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$T(e_2)=(1,0,2)$

$T(e_3)=(4,3,1)$

Άρα $(1) \Rightarrow [T^*]^e_e = \left([T]^e_e\right)^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

Επομένως $T^*(e_1) = 2e_1 + e_2 + 4e_3$

$T^*(e_2) = 3e_1 + 0e_2 + 3e_3$

$T^*(e_3) = 4e_1 + 2e_2 + e_3$

Άρα για $(x',y',z') \in \mathbb{R}^3$

$T^*((x',y',z')) = x'T^*(e_1) + y'T^*(e_2) + z'T^*(e_3)$

$= (2x'+3y'+4z', x'+2z', 4x'+3y'+z')$

(23)

(a) $\langle \cdot,\cdot \rangle$ συμμετρική, διγραμμική (εύκολο)

Θετικά ορισμένη

Έστω $y=(y_1,y_2,y_3) \neq (0,0,0)$. Θ.δ.ο $\langle y,y \rangle > 0$

Έχουμε $\langle y,y \rangle = y_1 - 2y_1y_3 + 2y_2y_3 + 4y_2^2 + 2y_3^2$

$= y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2 +$ 〃 〃 $=$

$= (y_1 - y_3)^2 + 4y_2^2 + 2y_2y_3 + y_3^2 =$

$= (y_1 - y_3)^2 + 3y_2^2 + (y_2 + y_3)^2$

~~Άρα ...~~

Άρα $\langle y, y \rangle \geq 0$ πάντα και

$$\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 - y_3 = 0 \\ y_2 = 0 \\ y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y_1 = y_2 = y_3 = 0$

Άρα $\langle , \rangle$ θετικά ορισμένο

Β) Ισομετρία $T : (\mathbb{R}^3, \langle\ \rangle) \to (W, \langle\ \rangle_{W})$?

υπενθύμιση

Ισχύει έστω $(V, \langle\ \rangle)$ χ.ε.γ. και W υπόχωρος του V. Ορίζουμε $\langle , \rangle : W \times W \to \mathbb{R}$ με $\langle w_1, w_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle$ τότε $\langle\ \rangle$ εσωτ. γινόμενο στο W (λέγεται ο περιορισμός του $\langle\ \rangle$ στο W)

Βήμα 1ο

Βρίσκουμε με Gram-Schmidt ορθοκανονική βάση $h = (h_1, h_2, h_3)$ του $(\mathbb{R}^3, \langle\ \rangle)$ ξεκινώντας από τη κανονική βάση του $\mathbb{R}^3$

Βήμα 2ο

όπως έρωτ. 1 βρίσκουμε βάση g_1, g_2, g_3 του υπόχωρου W του $\mathbb{R}^4$

Βημα 3ο

Ξεκινωντας απο τη βαση g_1, g_2, g_3 του W με gram schmidt βρισκουμε ορθοκανονικη βαση (k_1, k_2, k_3) του W

Βημα 4ο

Η $T: \mathbb{R}^3 \to W$ καθοριζεται θετοντας $T(h_i) = k_i$ για $i = 1, 2, 3)$